Έχουμε δει σε προηγούμενο μάθημα:

Για απορίες:
Πέμπτη μετά το μάθημα
Δευτέρα: 14:00-16:00
Τρίτη: 14:30- ...

▸ $\int R(\cos x, \sin x)dx$ όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση των u,v.

$y=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$\cos x = \ldots = \frac{1-y^2}{1+y^2}$

$\sin x = \ldots = \frac{2y}{1+y^2}$

$dx = \frac{2}{1+y^2}dy$

$$\Rightarrow \int R\left(\frac{1-y^2}{1+y^2}, \frac{2y}{1+y^2}\right)\frac{2}{1+y^2}dy$$

▸ $I_1 = \int \frac{x}{1+\sin x}dx$

$y=\tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Τότε $dx = \frac{2}{1+y^2}dy$

$\sin x = \frac{2y}{1+y^2}$

$\frac{x}{2} = \arctan y \Rightarrow x = 2\arctan y$

Το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο:

$$I_2 = \int \frac{2\arctan y}{1+\frac{2y}{1+y^2}} \cdot \frac{2}{1+y^2}dy = \int 4\arctan y \cdot \frac{1}{1+y^2+2y}dy =$$

$$= 4\int \arctan y \cdot \frac{1}{(y+1)^2}dy = 4\int \arctan y \left(-\frac{1}{y+1}\right)' dy =$$

$$= 4\arctan y \cdot \left(-\frac{1}{y+1}\right) - 4\int \frac{1}{1+y^2}\cdot\left(-\frac{1}{y+1}\right)dy =$$

$$= \frac{-4\arctan y}{y+1} + 4\int \frac{1}{(y+1)(y^2+1)}dy$$

Κάνουμε ανάλυση σε απλά κλάσματα:

$$\frac{1}{y+1}\cdot\frac{1}{y^2+1} = \frac{A}{y+1} + \frac{By+\Gamma}{y^2+1} = \frac{Ay^2+A+By^2+\Gamma y+By+\Gamma}{(y+1)(y^2+1)} = \frac{(A+B)y^2+(B+\Gamma)y+A+\Gamma}{(y+1)(y^2+1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ B+\Gamma=0 \\ A+\Gamma=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=-B \\ \Gamma=-B \end{array}\right\} \Rightarrow A=\Gamma,\ 2A=1 \Rightarrow \begin{array}{l} A=1/2 \\ B=-1/2 \\ \Gamma=1/2 \end{array}$$

Άρα, $4\int \frac{1}{(y+1)(y^2+1)}dy = 4\int \frac{1/2}{y+1} + \frac{-1/2 y + 1/2}{y^2+1} dy = \int \frac{2}{y+1} + \frac{-2y+2}{y^2+1} dy =$

$= 2\log(y+1) - \log(y^2+1) + 2\arctan y + c.$

Επειδή $\arctan y = x$, το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται:

$$I_1 = -\frac{2x}{1+\tan(\frac{x}{2})} + 2\log\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1\right) - \log\left(1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)\right) + x + c.$$

α) $\int R(x, \sqrt{1-x^2})dx$ όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση των u, v.

Μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

$x = \sin t$

$\sqrt{1-x^2} = \cos t$

$dx = \cos t\, dt$

και ανάγεται στο ολοκλήρωμα $\int R(\sin t, \cos t)\cos t\, dt$ που είναι ολοκλήρωμα μιας ρητής συνάρτησης των $\cos t, \sin t$, που μετατρέπεται σε ολοκλήρωμα με την αντικατάσταση $y = \tan\frac{t}{2}$.

β) $\int R(x, \sqrt{x^2-1})dx$ όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση των u, v.

[Μπορεί να γίνει η αντικατάσταση $x = \frac{1}{\cos t}$ και να καταλήξουμε σε ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης των $\cos t, \sin t$.] Δύσκολο!

Ευκολότερα, υπολογίζεται με την αντικατάσταση: $y = x + \sqrt{x^2-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{x^2-1} = y - x$ (*) $\Rightarrow \cancel{x^2} - 1 = y^2 + \cancel{x^2} - 2xy \Rightarrow 2xy = y^2+1 \Rightarrow x = \frac{y^2+1}{2y} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{1}{y}$ (**)

$$\sqrt{x^2-1} \overset{(*)}{\underset{(**)}{=}} y - \left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{2} - \frac{1}{2y}.$$

$$dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\right)dy$$

Έτσι, το αρχικό μας ολοκλήρωμα, μετασχηματίζεται στο:

$$\int R\left(\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{1}{y}, \frac{y}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{y^2}\right)dy$$

Το οποίο υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Παράδειγμα: Να υπολογίσετε το $I_1 = \int \sqrt{x^2-1}\, dx$.

Θέτουμε $y = x + \sqrt{x^2-1}$

$\sqrt{x^2-1} = y - x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}$

$dx = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right) dy$.

Το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο:

$$I_2 = \int \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{1}{4}\int \left(y - \frac{1}{y}\right)\left(1 - \frac{1}{y^2}\right) dy =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(y - \frac{1}{y} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^3}\right) dy = \frac{1}{4}\left(\frac{y^2}{2} - 2\log y - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right) + c.$$

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα είναι: $I_1 = \frac{1}{8}(x+\sqrt{x^2-1})^2 - \frac{1}{2}\log(x+\sqrt{x^2-1}) -$

$- \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2} + c$.

γ) $\int R(x, \sqrt{x^2+1})\, dx$, όπου $R(u,v)$ ρητή συνάρτηση των u, v.

$x = -\cot(t) = -\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$

Τότε $\sqrt{x^2+1} = \dots = \frac{1}{\sin(t)}$

$dx = (\dots)\, dt$

Μετασχηματισμός σε ρητή συνάρτηση $\cos t, \sin t$

Δύσκολο, δεν προτιμάται.

Πιο εύκολα, μπορούμε να κάνουμε την αντικατάσταση $y = x + \sqrt{x^2+1} \Rightarrow$

$\Rightarrow y - x = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow y^2 - 2xy + \cancel{x^2} = \cancel{x^2} + 1 \Rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y} \Rightarrow x = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\frac{1}{y}$.

Επίσης, $\sqrt{x^2+1} = y - x \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = y - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}\frac{1}{y}$

$dx = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{y^2}\right) dy = \frac{y^2+1}{2y^2}\, dy$

Έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται στο:

$\int R\left(\frac{y^2-1}{2y}, \frac{y^2+1}{2y}\right)\frac{y^2+1}{2y^2}\, dy$ που υπολογίζεται με ανάλυση σε απλά κλάσματα.

Παράδειγμα:

$I_1 = \int \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}dx$. Θέτουμε $y = x+\sqrt{x^2+1}$

Τότε, $x = \frac{y^2-1}{2y}$, $\sqrt{x^2+1} = \frac{y^2+1}{2y}$ και $dx = \frac{y^2+1}{2y^2}dy$

Οπότε το ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε:

$$I_2 = \int \frac{1}{\frac{y^2-1}{\cancel{2y}}\cdot\frac{\cancel{y^2+1}}{2y}}\cdot\frac{\cancel{y^2+1}}{2y^2}dy = 2\int\frac{1}{y^2-1}dy = 2\int\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y+1}dy = 2(\log(y-1)-\log(y+1))+c.$$

Έτσι, $I_1 = 2(\log(x+\sqrt{x^2+1}-1)-\log(x+\sqrt{x^2+1}+1))+c$

① $I_1 = \int\frac{1}{1+\sqrt{x+1}}dx$. Θέτουμε $y = 1+\sqrt{x+1} \Rightarrow y-1 = \sqrt{x+1} \Rightarrow y^2-2y+\cancel{1} = x+\cancel{1}$

$\Rightarrow x = y^2-2y$.

Άρα, $dx = (2y-2)dy$.

Επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε:

$$I_2 = \int\frac{1}{y}\cdot(2y-2)dy = \int 2-2\frac{1}{y}dy = 2y-2\log y+c$$

Συνεπώς, το αρχικό ολοκλήρωμα είναι:

$$I_1 = 2(1+\sqrt{x+1})-2\log(1+\sqrt{x+1})+c.$$

② $I_1 = \int\frac{dx}{1+e^x}$ Θέτω $y = 1+e^x \Rightarrow e^x = y-1 \Rightarrow x = \log(y-1)$

$dx = \frac{1}{y-1}dy$

Επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε:

$$I_2 = \int\frac{1}{y}\cdot\frac{1}{y-1}dy = \int\frac{1}{y-1}-\frac{1}{y}dy = \log(y-1)-\log y+c.$$

Επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα είναι:

$$I_1 = \log(e^x+1-1)-\log(e^x+1)+c =$$

$$= x-\log(e^x+1)+c.$$

③ $I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$

Θέτω $y = \sqrt[6]{x} = x^{1/6}$

Τότε $\sqrt{x} = x^{1/2} = y^3$

και $\sqrt[3]{x} = x^{1/3} = y^2$

και $x = y^6 \Rightarrow dx = 6y^5 dy$

Και έτσι, το αρχικό ολοκλήρωμα μετασχηματίζεται σε:

$I_2 = \int \frac{1}{y^3 + y^2} 6y^5 dy = \int \frac{6y^3}{y+1} dy$

$$
\begin{array}{r|l}
6y^3 & y+1 \\
\cline{2-2}
-6y^3 - 6y^2 & 6y^2 - 6y + 6 \\
\cline{1-1}
-6y^2 & \\
+6y^2 + 6y & \\
\cline{1-1}
6y & \\
-6y - 6 & \\
\cline{1-1}
-6 &
\end{array}
$$

$6y^3 = (y+1)(6y^2 - 6y + 6) - 6.$

Άρα, $I_2 = \int 6y^2 - 6y + 6 - \frac{6}{y+1} dy = 2y^3 - 3y^2 + 6y - 6\log(y+1) + c.$

Επομένως, το αρχικό ολοκλήρωμα είναι:

$I_1 = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\log(\sqrt[6]{x} + 1) + c.$

▶ Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt.$

Απόδειξη:

Θέτω $f(x) = \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt$ και $g(x) = x^4$.

Παρατηρώ ότι $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ και $\lim_{x \to 0^+} g(x) = 0$.

$f'(x) = e^{x^2} \cdot \sin x^2 \cdot 2x$

$g'(x) = 4x^3$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{x^2} \sin x^2 \cdot 2x}{4x^3} = \lim_{x \to 0^+} e^{x^2} \cdot \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{2} =$

$= 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 1/2.$

$\lim_{x\to 0^+} e^x = 1$

$\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ και $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$

Άρα, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x^2}{x^2} = 1$.

Εφόσον υπάρχει το $\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, από το θεώρημα De L'Hospital, υπάρχει και το $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ και είναι ίσα. Άρα, $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^4} \int_0^{x^2} e^t \sin t \, dt = 1/2$.

▸ Να υπολογιστεί το όριο: $\lim_{x\to +\infty} x^3 \cdot e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt = \lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2} dt}{x^{-3} e^{x^6}}$

Για $x>1$: $\int_0^{x^3} e^{t^2} dt \geq \int_1^{x^3} e^{t^2} dt \geq \int_1^{x^3} e^t dt \geq \int_1^x e^t dt = e^x - e \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$.

Άρα, $\lim_{x\to +\infty} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt = +\infty$.

Ισχύει ότι $e^y \geq y+1$ $\forall y$, άρα $e^{x^6} \cdot \frac{1}{x^3} \geq \frac{1}{x^3}(x^6+1) = x^3 + \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$

Να εξετάσουμε το $\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int_0^{x^3} e^{t^2} dt\right)'}{(x^{-3} e^{x^6})'} = \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2 \cdot \cancel{e^{x^6}}}{-3x^{-4}\cancel{e^{x^6}} + \cancel{e^{x^6}} \cdot 6x^5 \cdot x^{-3}} =$

$= \lim_{x\to +\infty} \frac{3x^2}{-3\frac{1}{x^4} + 6x^2} = 1/2$

Εφόσον υπάρχει το $\lim_{x\to +\infty} \frac{\left(\int_0^{x^3} e^{t^2} dt\right)'}{(x^{-3} e^{x^6})'}$, από το θεώρημα De L'Hospital υπάρχει και το $\lim_{x\to +\infty} \frac{\int_0^{x^3} e^{t^2} dt}{x^{-3} e^{x^6}}$ και είναι ίσα.

Άρα, $\lim_{x\to +\infty} x^3 \cdot e^{-x^6} \int_0^{x^3} e^{t^2} dt = 1/2$.